ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A+B$ *двух событий* A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два выстрела и A — попадание при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то $A+B$ — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B — несовместные, то $A+B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Пример 1. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A)=10/30=1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(B)=5/30=1/6.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=1/3+1/6=1/2.$$

Теорема сложения для совместных событий.

Теорема 6. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)} \qquad (13)$$

§ 3. Противоположные события

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Пример 1. Попадание и промах при выстреле по цели — противоположные события. Если A — попадание, то $\overline{A}$ — промах.

Пример 2. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — противоположные.

Теорема. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

§ 3. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим два события: A и B; пусть вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится и событие A и событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B).$$

Пример 1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков — конусный, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие A),

$$P(A)=3/10.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, т. е. условная вероятность

$$P_A(B)=7/9.$$

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B)=(3/10)\cdot(7/9)=7/30.$$

§ 4. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A.

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B). \qquad (*)$$

Для независимых событий теорема умножения $P(AB) = P(A)P_A(B)$ имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B), \qquad (**)$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Пример 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

Решение. События A и B независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$